Nascita e sviluppo del concetto di numero

Silvio Maracchia
Dipartimento di Matematica,Università La Sapienza, Roma

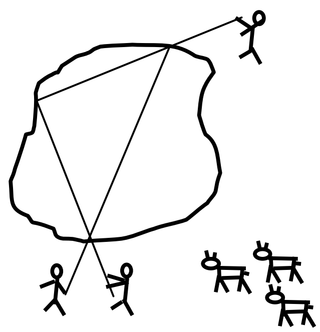
Note della conferenza tenutasi a Castione(TI) il 27 agosto 2007, nell'ambito del corso di aggiornamento per docenti di matematica di scuola media, rielaborate da Piero Antognini[1]

0. Sviluppo della matematica: esternismo contrapposto a internismo; continuismo contrapposto a discontinuismo

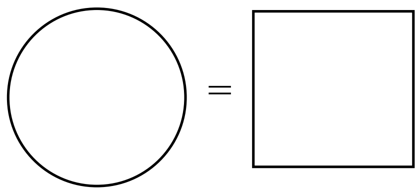
La matematica nasce con intenzioni pratiche: contare la numerosità di insiemi, misurare l'estensione di un territorio,…: questa è per gli esternisti la caratteristica della matematica e il motivo del suo successo.

Altri, invece, pensano che la ragione dello sviluppo della matematica vada cercata all'interno della matematica stessa: si comincia a "far matematica" quando si pongono problemi del tipo "costruire un quadrato equivalente a un cerchio dato", che hanno poi condotto allo studio di $\pi = 3,14159…$

ESTERNISMO



INTERNISMO



$\pi = 3,14159…$

L'aspetto forse più significativo della matematica, che unisce queste due posizioni contrapposte è la sua capacità, rifacendosi a problemi di origine pratica, di svilupparsi poi in modo razionale. Spesso teorie matematiche trovano in un secondo tempo delle applicazioni pratiche: un esempio è quello delle coniche, studiate da Apollonio, grazie alle quali dopo circa diciotto secoli Keplero riesce a determinare l'orbita dei pianeti[2].

La matematica (secondo il relatore) deve il suo sviluppo soprattutto a problemi teorici. Si può ricordare ad esempio il *problema di Didone* o *problema isoperimetrico*: quale è la figura geometrica che a parità di perimetro ha l'area maggiore? Questo problema, già posto dai Greci[3], ha come soluzione intuitiva il cerchio, ma si dovette attendere il XIX secolo perché il matematico svizzero Steiner ne desse una dimostrazione[4].

---

[1] Il contenuto della conferenza è stato ricostruito e sviluppato sulla base di appunti personali, dei lucidi messi a disposizione dal relatore prof. Maracchia e soprattutto grazie a un suo precedente articolo, *Evoluzione storica del concetto di numero*, apparso nella rivista L'insegnamento della matematica e le scienze integrate, vol.20AB n. 6, CRD "U. Morin" (pp. 682-710), 1997. Alcuni riferimenti bibliografici citati in nota, soprattutto ai testi classici, sono ripresi da quell'articolo.

[2] Apollonio di Perga (262-190 a.C.); Johannes Kepler (1571-1630)

[3] Secondo la leggenda *Didone*, regina di Tiro costretta all'esilio dal fratello Pigmalione si rifugiò presso re Iarba nel nord Africa per chiedere asilo. Iarba le promise che le avrebbe dato tanto terreno quanto poteva abbracciarne

Un altro modo di considerare nel corso della storia lo sviluppo della matematica è il continuismo o il discontinuismo. Per i continuisti la matematica è una sorta di dono divino, preesistente all'uomo, è un universo misterioso di cui gli uomini inseriti in un certo contesto temporale ("Newton o suo nipote") man mano scoprono qualcosa. La logica discontinuista invece afferma che sono i geni (dunque "Newton, Euler…") che creano la matematica e la sviluppano quindi in modo irregolare, cioè discontinuo: se la matematica ha seguito un certo percorso è solo perché ci sono stati determinati personaggi che hanno fatto certe scoperte…. Noi insegnanti, quando assegniamo un compito in classe, siamo continuisti: sappiamo che per il problema proposto le vie di soluzione si riducono a due o tre possibilità conosciute. In tempi brevi questa posizione continuista vale anche per lo sviluppo futuro della matematica, ma chi può dire cosa succederà su tempi più lunghi? Ad esempio, chi avrebbe potuto prevedere che conseguenze avrebbe prodotto la scoperta delle grandezze geometriche incommensurabili?

E ancora: gli Egiziani avevano una certa abilità in matematica (come ci testimonia ad esempio il *papiro Rhind* del 1600 a.C.) che era però certamente inferiore a quella dei contemporanei Babilonesi. Questo a riprova che la "scalata e la conquista della montagna matematica" avviene da più parti e in modo discontinuo.

1. Il numero ordinatore dell'Universo

Il vocabolo usato nelle varie civiltà per indicare il"numero" nasce molto dopo la nascita del numero stesso ma proprio per questo, dall'etimologia del termine scelto, possiamo trarre il significato che gli si è voluto attribuire.

L'origine del nome "numero" è probabilmente quella del termine sanscrito *namati*: "essere assegnato"; ma anche: "ente che distribuisce, che regola, che conta le quantità"[5]. Da questo derivano poi il greco *némo* (νεμω): "distribuisco, regolo, governo" oppure *nòmos* (νομος): "cosa assegnata, disposizione, legge"[6] e il latino *numerus*: "numero" ma anche "ordine, misura, ritmo, distribuzione" oppure *nemus* : "foresta, piantagione, filare".

I greci, però, usavano per numero il termine *aritmòs* (αριθμος) (da cui aritmetica) che vuol dire anche "ordine, censimento, armonia" ed è anche per questo che nella Bibbia un libro dell' Antico Testamento Bibbia che si occupa di censimenti è intitolato"Aritmòi": *I Numeri*.

Il numero viene considerato, dunque, un ordinatore, capace di operare (giuste) distribuzioni, di rispondere in maniera convincente a varie necessità del vivere insieme.

«*Se togliessimo il numero alla natura umana* -scrive Platone nell'Epinomide[7] - *non potremmo mai essere saggi. Mai, difatti, l'anima dell'essere vivente, che mancasse di ragione, potrebbe afferrare la virtù tutta quanta.*»

Per l'antica civiltà cinese la definizione di numero è più strettamente matematica e indica la capacità del numero di indicare la molteplicità. L'ideogramma cinese per indicare il numero, ma anche il calcolare e il contare, è formato da una mano con bastone, simbolo di "movimento" di "azione" e di una donna acconciata, simbolo di "frequenza" come ad indicare com-

---

una pelle di toro. Didone non si scoraggiò ma tagliò la pelle in striscioline sottili e le unì in modo da formare una corda. Con essa recintò lo spazio nel quale sarebbe dovuta poi nascere Cartagine. Il problema chiede la forma che Didone avrebbe dovuto dare alla sua corda per abbracciare la massima area possibile.

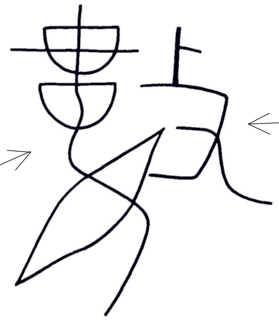
[4] Jakob Steiner (1796-1863)

[5] Cfr. A. Natucci, *Sviluppo storico dell'aritmetica generale e dell'algebra*, Napoli, Pellerano-Del Gaudio, 1954, p.35.

[6] A questo secondo termine greco il *Dizionario Etimologica Italiano* di C. Battisti e G. Alessio fa risalire l'etimologia di "numero", giudicandola comunque non del tutto certa.

[7] Platone, *Epinomide* 977 c.

plessivamente nel numero un'azione ripetuta molte volte.[8] Non vi è dunque in Cina nel numero il senso dell'ordine, della distribuzione, della legge, ma quello della pluralità, dell'accrescimento.[9]



2. Il numero dono divino

Da quanto visto prima, il numero è ritenuto troppo importante per essere soltanto una creazione umana e viene quindi addirittura considerato di origine divina.

Nel *Fedro* Platone ne attribuisce la paternità al dio egiziano Theut, che ne fa poi dono all'uomo assieme alla geometria, all'astronomia e alla scrittura.[10] Analogamente Eschilo fa dire al protagonista del *Prometeo legato* di aver tolto gli uomini dallo stato selvaggio con i doni del numero, «*sommo fra tutte le scienze*», e della scrittura.[11]

Secondo Platone ed Eschilo numeri e scrittura vengono dunque "regalati" insieme, come ad accentuare la loro contemporaneità, vera o presunta che sia: questo sembra indicare che senza la scrittura i numeri avrebbero avuto poca strada da fare, oppure che il numero si sia trovato all'origine della scrittura, ne abbia cioè favorito la nascita.

Ma ancora Platone nel *Timeo* narra che il Demiurgo, per operare il passaggio da un primitivo caos nel quale le cose erano mescolate senza alcuna regola ad una natura ordinata, adorna «*tutte le cose di forme e di numeri*[12]».

Per capire l'universo bisogna quindi conoscere la matematica; è proprio la matematica, la vera essenza della natura e le risposte a tutte le nostre domande si possono conoscere solo nella matematica. Il mondo non è pertanto soggetto ai capricci degli dei, ma ad una regola che rappresenta la divinità stessa (per i Pitagorici la divinità è il numero stesso!) o alla quale le stesse divinità devono sottostare.

Anche per Sant'Agostino (354-430 d.C.) la matematica è un linguaggio divino, come testimoniano diversi suoi scritti.[13]

---

[8] Cfr. G. Buffa, *Fra numeri e dita*, Bologna, Zanichelli, 1986, p.20.

[9] Oggi in Cina per indicare il "numero" (sù) si usa un ideogramma che ha ancora una buona somiglianza con l'antico poiché ne è una sua stilizzazione. Lo stesso ideogramma con una pronuncia leggermente diversa (su) ha anche il significato di "contare".

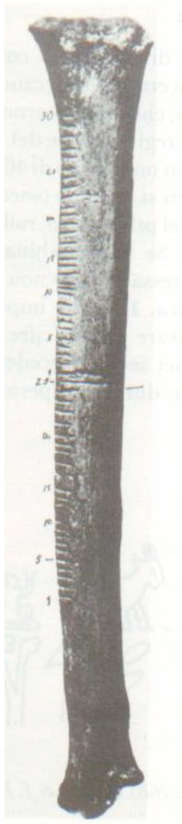
[10] Platone, *Fedro*, 274 d.

[11] Eschilo, *Prometeo legato,* Secondo episodio.

[12] Platone, *Timeo,* 53 a-b.

[13] Ne *La città di Dio*: «*Tu hai tutto disposto con misura calcolo e peso.*» (XI,30); nelle *Confessioni*: «*… Tu creasti le cose che quelli numerano.* » ;«*...dallo studio del mondo creato…e la visibile testimonianza degli astri…e me ne splendeva il perché attraverso i numeri…*» (V,3); nel *De libero arbitrio*: «*Come sono vere e immutabili le regole dei numeri così lo sono quelle della sapienza.*» (II,3;29)

3. Nascita ed evoluzione del numero



Si possono ipotizzare tre percorsi fondamentali che appartengono all'«*evoluzione storica*» della nascita del numero.

3.1 Le segnalazioni della *numerosità di particolari insiemi* di oggetti attraverso opportune indicazioni (tacche su ossa, graffi su pareti di grotte, ecc.).

Si tratta però di particolari artifici che hanno avuto una scarsa influenza sul numero vero e proprio. È difficile, inoltre, pensare ad operazioni su insiemi ("unione" e "sottrazione" eventualmente) ed a "traduzioni" numeriche più o meno lontane ed è ugualmente difficile pensare a nomi dati a quelle particolari sequenze di segni.

Il famoso osso di lupo[14] su cui sono state trovate 55 tacche suddivise in due sezioni di 25 e 30 ciascuna, risale a 30000 anni or sono. I numeri, il loro nome, il loro uso sono però assai più recenti, legati forse alle origini della scrittura o di poco anteriori quindi collocati tra il VI e il IV millennio a.C..

3.2 *I numeri scritti nel cielo* attraverso le misure celesti, le costellazioni, le orbite dei vari pianeti mobili, le evidenti ripetizioni dei fenomeni, avrebbero potuto indicare un ritmo, una scansione del tempo e dello spazio da trasferirsi poi nella pratica corrente per situazioni del tutto diverse ma sempre dettate da esigenze di tipo quantitativo e spaziale.

Secondo Giorgio De Santillana l'osservazione del cielo sarebbe già iniziata in epoche preistoriche[15], ma tutto ciò è improbabile, in quanto essa richiede tempo, che l'uomo primitivo, agricoltore o cacciatore che fosse, non aveva. Inoltre l'astronomia ha cominciato a svilupparsi solo quando i numeri e la geometria avevano raggiunto già un certo livello.

3.3 La *conquista dei numeri* rappresenta un lento percorso di graduale costruzione dell'uno, del due, del tre e così via. Si tratta di una conquista che passa attraverso la crescita della vita sociale del gruppo, con la creazione dei *nomi* dei vari numeri e con la successiva possibilità di astrarre via via questi dagli oggetti specifici. Come dice Bertand Russell tutto questo processo ha richiesto molto tempo: *«Devono essere state necessarie molte epoche storiche per scoprire che una coppia di fagiani e un paio di giorni erano entrambi espressioni del numero 2: il grado di astrazione qui implicito è ben lontano dal poter essere facilmente afferrato»*[16]

4. Importanza dei nomi dei numeri come inizio dell'astrazione

Dei tre percorsi ipotizzati è probabilmente l'ultimo che ha determinato la nascita del numero.

---

[14] Quest'osso fu trovato dall'archeologo *Karl Absolom* nel1937 durante scavi in Cecoslovacchia centrale.
Cfr. per la fotografia L.Bunt.,P.Jones., J.Bedient, *Le radici storiche delle matematiche elementari,* Bologna, Zanichelli 1983, p.2

[15] Cfr. G. De Santillana, *Fato antico*, Milano, Adelphi, 1985

[16] B. Russell, *Introduzione alla filosofia matematica,* Milano, Longanesi, 1984, p.16. Probabilmente ci volle inoltre altro tempo per considerare che anche un fagiano e un giorno rappresentano, insieme, un'espressione del numero 2 così come ogni altra coppia di oggetti, reali o astratti, non uguali o, meglio, non necessariamente uguali.

L'analisi storica, e più ancora quella psicologica, può essere arricchita con le osservazioni che sono possibili presso civiltà primitive ancora oggi esistenti o per lo meno esistenti allorchè sono stati iniziati questi studi storici.

Ebbene, le analisi dei nomi attribuiti ai primi numeri naturali, mostrano innanzi tutto che il grande pallottoliere a disposizione dell'uomo, le dita delle mani, non venne inizialmente considerato. Appare indicativo, ad esempio, il nome cinese «*er*» dato al *due*, nome che vuol dire anche "orecchi": è ovvio pensare che per esprimere il numero si pensò ad una coppia nota e familiare quale è appunto la coppia degli orecchi.[17]

UNO rappresenta il soggetto stesso e tutto il suo mondo, ma anche la divinità e il bene.

I Pitagorici hanno forse conservato questa prerogativa assumendo l'uno come indicatore dell'anima e della mente per la sua stabilità e fermezza o come sostanza, principio di ogni cosa.

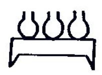
DUE rappresenta tutto ciò che è esterno, sconosciuto e quindi ostile, il male, la divisione.

Matematicamente l'uno e il due sono nati insieme. Anzi il due chiarifica il significato numerico dell'uno. Da qui la grande importanza che, nello sviluppo del numero, ha avuto appunto il due, che può essere considerato il primo numero vero e proprio. Alcune antiche civiltà (o anche popoli primitivi attuali) consideravano questi due numeri già sufficienti per i loro conteggi dato che dopo il due, prima che si concretizzasse il successivo numero tre, vi era la moltitudine, i molti.[18]

Numericamente il due rappresenta la possibilità della divisione (in parti uguali), la separazione, ed è da queste operazioni che ha preso il suo nome.

TRE rappresenta il molto, l'oltre.

Presso i Sumeri, ad esempio, il tre («*esh*») vuol dire appunto anche "pluralità" e tre segni ripetuti sono un geroglifico che gli Egizi e gli Ittiti e i Cinesi usavano per indicare anch'essi la *pluralità*.



Tre brocche = diluvio (Egizi)

Tre alberi = foresta (Cinesi)

Gli antichi Greci, per indicare il «molto infelice, infelicissimo» usavano dire τρισαθλιος (trisàtlios) cioè τρις-αθλιος che letteralmente vuol dire «tre (volte) infelice ». E con τριπαλαι (tripàlai) = τρις-παλαι cioè «tre-un tempo» si vuole indicare una cosa molto remota, accaduta «molto tempo fa».

Anche presso i Romani «*ter»* sta spesso per «*molto, assai*», così «terfelix» vuol dire «felicissimo» e «bis terque», cioè "due e tre volte" sta per «molte volte».

Analogamente nella lingua celtico-francese, ma ancora nel francese moderno il «*très*» premesso a qualsiasi aggettivo sta proprio per «molto» cioè porta al superlativo assoluto e anche in inglese viene attribuito a «*thrice*» il doppio significato di «tre volte» e di «molti».

---

[17] L'ideogramma usato per il «due» è però differente del pittogramma usato per indicare gli «orecchi» e questo potrebbe voler dire che questo pittogramma non era ancora stabilito quando nacque il concetto del due oppure che vi fu un ripensamento riguardo alla scrittura dei numeri per razionalizzarla a prescindere dai loro nomi. Nel Tibet il nome dato al *due* vuol dire anche "ali" e presso gli ottentotti per il *due* viene usata la stessa parola che indica le "mani".

[18] Il vocabolario Pari dà *omi* (uno), *curiri* (due) e quindi *prica* che vuol dire molti; presso i Batacudo si ha addirittura *mokenam* per uno e poi *uraha* per molti.

Un vero e proprio numero si trova per il tre in un popolo dell'Oceania (stretto di Torres) che viene costruito con l'uno e il due[19].

5. La numerazione sanscrita

Le origini dei nomi dei nostri numeri provengono dall'antica numerazione nella lingua sanscrita, al cui ceppo linguistico sono riconducibili diverse lingue indoeuropee.

numero	**nome**	**significato**
uno	enas, eka	questo, quello là
due	dvi, doi	dividere, separare
tre	trsh, tri	trapassare, penetrare, andare oltre (trans)
quattro	(e)ka-tr, catur, chatur	uno-tre
cinque	panca(n), kankan	mano aperta
sei	sat	legato al mignolo
sette	sapta	seguente (il mignolo cioè anulare)
otto	asta	sporgente (medio)
nove	nava	cenno, mostrare (indice)
dieci	daca	due mani
cento	cata	
mille	sehastre	

Osserviamo i significati legati ai numeri uno e due visti in precedenza.[20]

Si nota ancora una volta il significato attribuito al numero tre a testimonianza di una operazione che ricorda una precedente situazione in cui l'uno e il due erano i soli numeri conosciuti, sufficienti per una civiltà semplice.

Con il *quattro* si entra in una costruzione numerica più elevata poichè viene costruito con i numeri precedenti. Anche questo rappresenta un progresso notevole nello sviluppo del numero: si comincia in un certo senso a percorrere la strada dell'astrazione.

Infine è con il *cinque*, a testimonianza di un progresso numerico notevole, che si cominciano ad usare le dita delle mani per indicare i numeri e probabilmente per contare sempre più speditamente. L'uso delle dita viene però raggiunto solo dopo secoli (quanti?) di lento progresso e porta con sè la numerazione basata sul dieci come testimoniano anche i numeri *cento* e *mille* ugualmente presenti nella lingua sanscrita.

6. Sul numero dieci

Per Aristotele il fatto che sia i Greci sia i Barbari contino con la base numerica dieci non può essere casuale[21]: una circostanza che si verifica sempre non può risiedere che nella natura delle cose. Per spiegare la fortuna del dieci, dopo aver esaminato varie ipotesi di carattere a-

[19] Urapun = uno; okosa = due; <u>okosa-urapun = tre</u>; okosa-okosa = quattro; okosa-okosa-urapun = cinque; okosa-okosa-okosa = sei; e, per qualsiasi numero maggiore di sei: ras = folla (cfr. G. Ifrah, *Storia universale del numero*, Milano, Mondadori, 1984, p.17.

[20] Cfr. G. Ifrah, op. cit., p.32 e T. Dantzig, *Il numero linguaggio della scienza*, Firenze, La Nuova Italia, 1965, 3ª ristampa 1985, p.20.

[21] Aristotele (384-322 a.C.), *Problemi* libro XV,3

ritmetico (il dieci comprende vari tipi di numeri: pari, quadrati, cubi, primi, composti; dieci è inoltre la somma dei primi quattro numeri), astronomico (sono nove i corpi mobili celesti e con la terra sono quindi dieci) e altre ancora, Aristotele osserva che forse il motivo va ricercato nell'essere dieci le dita delle mani.

La spiegazione di Aristotele, non solo è convincente ma è anche suffragata dai fatti: una ricerca compiuta su centinaia di tribù di Indiani d'America ha portato al risultato che circa un terzo usava una numerazione a base decimale e quasi altrettanti a base quinaria o quinaria-decimale e un decimo una numerazione ventesimale; i restanti usavano infine un sistema basato sull'uno e sul due e cioè si trovavano ancora in una fase di prima evoluzione.[22]

Qualche secolo dopo, un poeta latino, Ovidio nei *Fasti*, ripete lo stesso tema:

L'anno finiva quando la luna il suo decimo giro:
questo numero era allora molto pregiato;
o perché sono dieci le dita con cui noi contiamo
e nel decimo mese partorisce la donna;
o perché nel contare si va sino al dieci, da cui
incomincia un novello ordine di diecine.
Perciò Romolo cento dei cittadini divise
in dieci gruppi e fece dieci ordini di astati
....
Perciò serbò nell'anno il solito numero; e mesta
la moglie dieci mesi piange il marito morto.[23]

7. Le "lista dei contrari" della scuola pitagorica

Già nella scuola pitagorica (VI sec. a.C.) il numero dieci era considerato sacro: per i Pitagorici infatti l'universo è retto da dieci coppie di principi uno contrario dell'altro[24]. Le coppie sono:

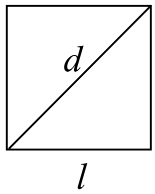
uno	molteplice
finito	infinito
dispari	pari
quadrato	rettangolo
maschio	femmina
buono	cattivo
quiete	movimento
destro	sinistro
diritto	curvo
luce	oscurità

[22] Cfr. C. Boyer, *Storia della matematica,* Milano, Mondadori, 1980, p. 3.
[23] Publio Ovidio Nasone (43 a.C.-18 d.C.), *Fasti* III, vv. 121-128; 133-134. A titolo di curiosità si può inoltre osservare, che l'art. 89 del Codice Civile Italiano fa divieto alla donna di risposarsi «*se non dopo trecento giorni* (dieci mesi!) *dallo scioglimento, dall'annullamento o dalla cessazione degli effetti civili del precedente matrimonio...*». Non si tratta ovviamente della convenienza legata al lutto da osservare ma a problemi di eventuali gravidanze già in atto, ma è curioso che ritroviamo i dieci mesi di Ovidio.
[24] Aristotele, *Metafisica* I,V,986 a.; cfr. anche A. Frajese, *Attraverso la storia della matematica*, Firenze, Le Monnier, 1977, pp.15-20.

Prescindendo dalle tre coppie *maschio-femmina*, *luce-oscurità*, *buono-cattivo*, la altre sette hanno una valenza matematica.

8. Scoperta delle grandezze incommensurabili; numeri diagonali e laterali

Dalla contrapposizione *dispari-pari*, forse con la prima dimostrazione matematica, deriva la scoperta dell'incommensurabilità tra lato e diagonale di un quadrato, con tutte le conseguenze del caso per l'esistenza della scuola pitagorica stessa!



Se l è la misura del lato di un quadrato e d quella della sua diagonale, allora per il teorema di Pitagora deve valere $d^2 = 2l^2$.

Se d e l fossero commensurabili tra loro, allora si potrebbe ammettere (rispetto a un'opportuna unità di misura) che d e l siano numeri naturali primi fra loro (cioè MCD(d;l)=1).

L'uguaglianza $d^2 = 2l^2$ implica che d^2 è pari e quindi anche d è pari (poiché un numero e il suo quadrato sono entrambi pari o entrambi dispari), cioè $d = 2m$ per un certo numero naturale m. Sostituendo quest'ultima uguaglianza in $d^2 = 2l^2$ si ottiene successivamente:

$(2m)^2 = 2l^2$; $\quad 4m^2 = 2l^2$; $\quad 2m^2 = l^2$

La relazione ottenuta implica, analogamente a prima, che anche l^2 è pari e quindi l e d sono pari, in contraddizione con l'ipotesi che d e l sono primi fra loro.

Abbiamo dunque mostrato che d e l sono incommensurabili.

Teone di Smirne (vissuto probabilmente nella prima metà del II sec d.C.)[25] recupera l'insuccesso dei Pitagorici studiando la successione dei *numeri laterali* l_n e *diagonali* d_n, che tra l'altro permettono di ottenere una successione di numeri razionali convergenti verso $\sqrt{2}$.

Con la dimostrazione precedente abbiamo visto che: "Il quadrato di un numero non può essere il doppio di un quadrato". Si può constatare che in alcuni casi "il doppio di un certo numero quadrato differisce di 1, in più o in meno rispetto ad un altro numero quadrato".

$l_1 = 1$	$d_1 = 1$	$d_1^2 = 2 \cdot l_1^2 - 1$
$l_2 = d_1 + l_1 = 2$	$d_2 = d_1 + 2 \cdot l_1 = 3$	$d_2^2 = 2 \cdot l_2^2 + 1$
$l_3 = d_2 + l_2 = 5$	$d_3 = d_2 + 2 \cdot l_2 = 7$	$d_3^2 = 2 \cdot l_2^2 - 1$
$l_4 = d_3 + l_3 = 12$	$d_4 = d_3 + 2 \cdot l_3 = 17$	$d_4^2 = 2 \cdot l_2^2 + 1$

...

Teone ci dice "e così di seguito…"; noi oggi utilizziamo le formule ricorrenti:

$l_n = d_{n-1} + l_{n-1}$ $\qquad d_n = d_{n-1} + 2 \cdot l_{n-1}$ $\qquad d_n^2 = 2 \cdot l_n^2 + (-1)^n$

L'ultima uguaglianza si può dimostrare per induzione completa.

Per $n = 1$, come visto sopra, la relazione vale.

Supponendo ora che la relazione $d_n^2 = 2 \cdot l_n^2 + (-1)^n$, che equivale a $d_n^2 - 2 \cdot l_n^2 = (-1)^n$, valga per un certo numero n, e usando le formule ricorrenti per l_n e d_n si ottiene:

[25] Cfr. G.Loria, *Le scienze esatte nell'antica Grecia,* Milano, Cisalpino-Goliardica, 1987[2] p.468, pp.834-837

$$d_{n+1}^{\ 2} - 2\cdot l_{n+1}^{\ 2} = (d_n + 2\cdot l_n)^2 - 2\cdot(d_n + l_n)^2 =$$
$$= d_n^{\ 2} + 4\cdot d_n l_n + 4\cdot l_n^{\ 2} - 2\cdot d_n^{\ 2} - 4\cdot d_n l_n - 2\cdot l_n^{\ 2} =$$
$$= -d_n^{\ 2} + 2\cdot l_n^{\ 2} = -(d_n^{\ 2} - 2\cdot l_n^{\ 2}) = -(-1)^n = (-1)^{n+1}$$

La relazione vale dunque anche per n+1.

Dall'uguaglianza $d_n^2 = 2 \cdot l_n^2 + (-1)^n$, dividendo per l_n^2 si ottiene

$$\left(\frac{d_n}{l_n}\right)^2 = 2 + \frac{(-1)^n}{l_n^{\ 2}}$$

Questa relazione ci dice che $\lim_{n\to\infty} \frac{d_n}{l_n} = \sqrt{2}$.

Consideriamo alcuni termini della successione $\frac{d_n}{l_n}$:

$$1, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \frac{239}{169}, \ldots$$

Si noti che $\frac{7}{5}$ è l'approssimazione del rapporto tra diagonale e lato del quadrato usata da Platore nel suo famoso brano detto del "*numero nuziale*".[26]

9. Definizione di numero

E' con la civiltà greca che il numero subisce una decisiva evoluzione passando da una concezione pratica, legata quasi esclusivamente agli insiemi di oggetti reali, ad una concezione razionale nella quale il numero può esistere al di là e al di sopra di tale corrispondenza.

La più antica *definizione* è dovuta a Talete di Mileto:

«*Numero è un sistema di unità.*»

Questa la definizione, che presuppone evidentemente quella di *unità*, verrà ripresa da molti filosofi e matematici successivi (come ad esempio Platone, Aristotele, Euclide, Diofanto, Al-Kuwarizmi, Leonardo Pisano, Cardano), almeno sino alle moderne definizioni di Cantor e di Russell e alla costruzione assiomatica di Peano.

I Pitagorici considerano il numero come qualcosa che si genera da se stesso e costituisce la stabilità delle cose del mondo.

Per Cartesio il numero è un'astrazione, un modo di pensare, e anche Leibniz lo ritiene una figura incorporea derivata da un insieme di oggetti di natura qualsiasi.

Newton e successivamente Wallis considerano invece il numero come misura, cioè come una quantità riferita a ciò che di solito viene assunto come unità.

La definizione del numero presuppone pertanto quella dell'unità.

10. Definizione dell'unità

Per Aristotele *l'unità, l'uno, non è numero ma principio dei numeri,* per cui, afferma anche, bisognerebbe ipotizzarne la stessa esistenza.[27] E' questa un'eccezione allo stile descrittivo della matematica greca, come ad esempio in Euclide:

[26] Platone, *Repubblica*, 546 b-d

«*Unità è ciò secondo cui ciascun ente è detto uno.*»[28]

Si tratta di una definizione per astrazione di tipo cantoriano: l'unità è ciò che di comune hanno, per quanto riguarda la quantità, tutti gli insiemi che hanno un solo elemento. Questa definizione verrà ripresa da vari matematici, come ad esempio Tartaglia e Luca Pacioli.
Tartaglia inoltre considera l'unità indivisibile come il punto geometrico in Euclide.

11. Sullo zero[29]

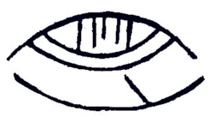
Secondo lo storico della matematica Van der Waerden: «*Lo zero è la cifra più importante. Ci vuole un colpo di genio per trarre qualcosa dal niente, per dargli un nome e inventane un simbolo.*»[30]

La storia antichissima dello zero ne delinea i suoi tre significati:

- *niente, nulla*
- *posto vuoto*
- *numero zero*

Lo zero matematico è inevitabilmente legato filosoficamente con il *nulla*, il vuoto, con ciò che non esiste e sul cui significato hanno riflettuto pensatori di ogni epoca, a cominciare da Aristotele. D'altra parte un vocabolo per indicare il *niente* è presente in quasi tutte le lingue. In greco ad esempio il *nulla* si indica con *oudèn* (οὐδέν).

I Babilonesi, già attorno al 300 a.C., usano un doppio cuneo per indicare un *posto vuoto*, cioè un simbolo separatore, nel loro sistema di numerazione in base sessanta.



I Greci, soprattutto gli astronomi a partire dal secondo secolo d.C., usano con lo stesso significato la lettera greca *o* (omicron).
I Maya, nel loro sistema di numerazione in base venti, dal 300 d.C. usano invece una conchiglia (o forse un occhio) come simbolo separatore.

Nel sistema di numerazione posizionale decimale degli indiani il vuoto numerico viene indicato con il termine sanscrito di *sunya*, che diventa poi il "vuoto" arabo *sifr* e l'occidentale *zephirum* di Leonardo Pisano nel 1200. Da quest'ultimo deriva poi "zero". Dalla *sifr* araba derivano anche i termini italiani "zefiro", con il significato di venticello leggero e"cifra".

Il matematico indiano Brahmagupta nel VI sec. per primo considera lo zero come un vero e proprio *numero*; ne stabilisce le regole aritmetiche, lasciando inespressa la divisione a:0, tranne nel caso particolare 0:0 che considera uguale a 0. Sarà poi Bhaskara nel XII sec. a considerare il risultato di a:0 come la divinità (noi oggi diciamo "infinito"), perché non soggetto ad accrescimenti e diminuzioni.

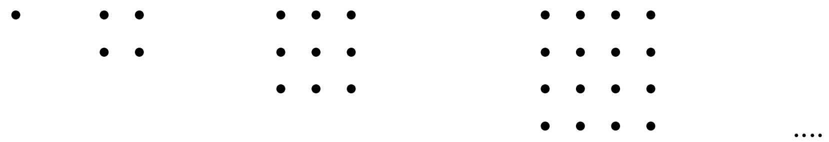
[27] Aristotele, *Analitici Secondi*, 76 a, 33-35.
[28] Euclide, *Elementi*, prima definizione del libro VII (la seconda è: «*Numero è una pluralità composta da unità*».
[29] S.Maracchia, *Storia dell'algebra,* Napoli, Liguori, 2005
[30] B.L.Van der Waerden, *Science Awakening,* Groningen, Noordhoff,1954, p.56

12. Numeri quadrati e triangolari

Molte suddivisioni della matematica greca riguardanti i numeri si rifanno alla "lista dei contrari" della scuola pitagorica ricordata da Aristotele.

Dalla contrapposizione *dispari – pari* è possibile ad esempio ottenere l'altra contrapposizione *quadrato – rettangolo.*

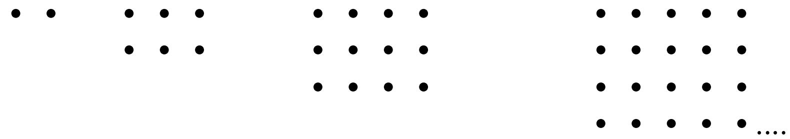
Con la nota raffigurazione aritmo-geometrica pitagorica si mostra infatti che sommando i primi n numeri dispari si ottengono i *numeri quadrati*.



1 1+3 = 4 1+3+5= 9 1+3+5+7=16 ....

Oggi scriviamo: $1+3+\ldots+(2n-1) = n^2$. [31]

Analogamente sommando i primi n numeri pari si ottengono i *numeri rettangolari*.

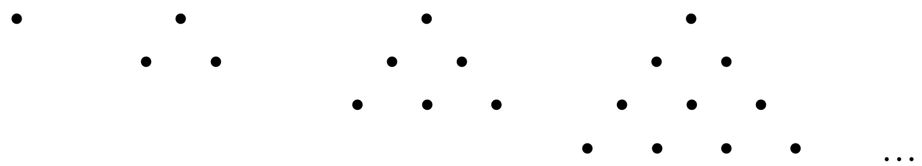


2 2+4 2+4+6 2+4+6+8 ....

Oggi scriviamo: $2+4+\ldots+2n = n \cdot (n+1)$.

Gli antichi matematici greci si basavano sulla rappresentazione aritmo-geometrica pitagorica per mostrare delle proprietà dei numeri che con il nostro simbolismo richiedono solo la conoscenza della somma di n termini di una progressione aritmetica.

Ad esempio i *numeri triangolari* sono i termini della successione

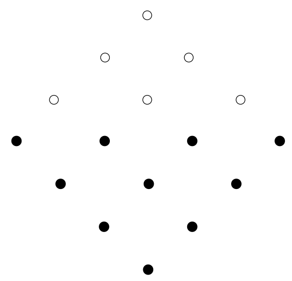


1	1+2	1+2+3	1+2+3+4	…
1	3	6	10	…

Oggi scriviamo: $1 + 2 + 3 +\ldots+ n = \dfrac{n \cdot (n+1)}{2}$.

Utilizzando la rappresentazione aritmo-geometrica è immediato osservare che la somma di due numeri triangolari consecutivi è un numero quadrato.

[31] Leonardo Pisano sfrutta questa proprietà per generare infinite terne pitagoriche. Ponendo infatti $2n+1 = m^2$, si ha: $1+3\ldots+(2n-1) + (2n+1)= n^2 + m^2 = (n+1)^2$. Ad esempio da $m^2 = 2n+1= 25$, segue $n = 12$ e $12^2+ 5^2 = 13^2$



I numeri quadrati si possono dunque ottenere sommando i numeri naturali sino ad un certo numero (n) e diminuendo via via sino ad uno. Cioè:

$$1+2+3+\ldots+(n-1)+\underline{n}+(n-1)+\ldots+3+2+1=n^2$$

Con il nostro simbolismo si verifica che

$$\frac{(n-1)\cdot n}{2}+\frac{n\cdot(n+1)}{2}=n^2$$

L'esempio dei numeri quadrati e triangolari ci mostra come che per i Pitagorici geometria e aritmetica concorrevano alla crescita della matematica con un reciproco aiuto.

La classificazione dei numeri inizialmente operata dai Greci è stata molto dettagliata anche al di là dei cosiddetti *numeri poligonali*[32], di cui i numeri quadrati e quelli triangolari sono solo un caso particolare.

I numeri sono stati suddivisi, ad esempio, in *laterali*, *diagonali*, *eteromechi*, *circolari* ecc.; oppure, tenendo conto delle particolarità dei divisori, in numeri *primi*, *deficienti*, *eccedenti*, *perfetti*, *amici*, ecc.

13. Infinità dei numeri primi

Concludiamo accennando alla suddivisione fra *numeri primi* e *composti*. I libri VII, VIII e IX degli *Elementi* di Euclide sono dedicati alla teoria dei numeri. Nel libro VII vengono definiti numeri primi e composti.

Definizione 11.
Un numero primo è quello che è misurato soltanto dall'unità.

Definizione 13.
Un numero composto è quello che è misurato da qualche numero [diverso da 1].

Nel libro IX, si afferma:

---

[32] In generale l'n-esimo numero poligonale di ordine k è definito da $P_{k,n}=\sum_{i=1}^{n}(1+(i-1)(k-2))=\frac{(k-2)\cdot n^2-n(k-4)}{2}$.
Con k=3 si ottengono i numeri triangolari $P_{3,n}=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$; con k=4 i numeri quadrati $P_{4,n}=n^2$; con k=5 i numeri pentagonali $P_{5,n}=\frac{n\cdot(3n-1)}{2}$,…

Proposizione 20.
I numeri primi sono più di qualsiasi moltitudine assegnata di numeri primi.
In altre parole, ci sono infiniti numeri primi.

Per la sua brevità la dimostrazione che Euclide dà di questa proposizione è un classico e rimane a tutt'oggi (anche a detta di G.Hardy nel suo magnifico libretto *Apologia di un matematico*) una delle più belle dimostrazioni di tutta la matematica.

Euclide dimostra: dati i numeri primi a, b, c ne esiste almeno un altro. Infatti se il numero $a \cdot b \cdot c + 1$ è primo, la proposizione è dimostrata. Se $a \cdot b \cdot c + 1$ è composto, ha un divisore primo diverso da a, b, c. Questa conclusione si lascia applicare a qualsiasi lista data di numeri primi.

BIBLIOGRAFIA

- J. Barrow, *Da zero a infinito, la grande storia del nulla,* Milano, Mondadori, 2001
- C. Boyer, *Storia della matematica,* Milano, Mondadori, 1980
- G. Buffa, *Fra numeri e dita*, Bologna, Zanichelli, 1986
- L. Bunt, P. Jones, J. Bedient, *Le radici storiche delle matematiche elementari,* Bologna, Zanichelli, 1983
- A. Frajese, *Attraverso la storia della matematica*, Firenze, Le Monnier, 1977
- G.J. Gheverghese, *C'era una volta un numero. La vera storia della matematica*, Milano, Il saggiatore, 2003
- G. Ifrah, *Storia universale dei numeri*, Milano, Mondadori, 1984
- M. Kline, *Storia del pensiero matematico,* Volume I *Dall'Antichità al Settecento,* Einaudi, 1991
- G. Loria, *Le scienze esatte nell'antica Grecia*, Milano, Cisalpino-Goliardica, 1987[2]
- S. Maracchia, *Evoluzione storica del concetto di numero,* L'insegnamento della matematica e le scienze integrate, vol.20AB n. 6, CRD "U. Morin" (pp. 682-710), 1997
- S. Maracchia, *Storia dell'algebra*, Napoli, Liguori, 2005
- C. Seife, *Zero. La storia di un'idea pericolosa*, Torino, Bollati Boringhieri, 2002